SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Fausto Ferrari

PROPRIETÀ DI REGOLARITÀ DELLA MISURA ARMONICA PER OPERATORI SUBELLITTICI

29 febbraio 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Abstract In this paper we shall show some results about the properties of the harmonic measure for subelliptic operators on a new class of domains, the ϕ-Harnack's domains.

Riassunto In questa nota presenteremo alcuni risultati sulle proprietà della misura armonica per operatori subellittici per una nuova classe di domini, i domini ϕ-Harnack.

1 Introduzione

Le proprietà della misura armonica assumono importanza rilevante nello studio del comportamento alla frontiera delle funzioni armoniche positive. A questo proposito i risultati ottenuti da numerosi autori (vedi [11], [20], [10], [21], [2] e [12]) nell'ambito degli operatori uniformemente ellittici e parabolici, per esempio in merito all'esistenza di teoremi di confronto alla frontiera di tipo Harnack, ne sono la riprova.

Recentemente Capogna e Garofalo [8] hanno studiato il comportamento alla frontiera delle soluzioni positive dell'equazione $\mathcal{L}u = 0$, con $\mathcal{L}$ operatore subellittico (nel seguito tali funzioni saranno dette $\mathcal{L}$-armoniche) su domini limitati la cui frontiera è non tangenzialmente accessibile (domini N.T.A.), relativamente alla metrica di Carnot-Carathéodory naturalmente associata all'operatore. Questi risultati si basano su alcune proprietà notevoli della misura $\mathcal{L}$-armonica associata all'operatore, in particolare gli autori provano la validità di una *formula di duplicazione* per la misura $\mathcal{L}$-armonica, vale a dire, l'equivalenza tra la misura $\mathcal{L}$-armonica di un disco alla frontiera e la misura $\mathcal{L}$-armonica di un disco concentrico al precedente ma di raggio doppio, relativamente alla metrica naturalmente associata all'operatore. Una delle chiavi di lettura dei risultati ottenuti da Capogna e Garofalo è quella secondo cui una 'buona regolarità' geometrica della frontiera, dal punto di vista euclideo, per esempio di classe C^2 nel caso del sublaplaciano sul gruppo di Heisenberg, consente di 'trascurare'l' effetto dei punti caratteristici.

Proprio al fine di comprendere meglio il ruolo che i punti caratteristici giocano nel comportamento alla frontiera delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche positive, può essere utile seguire un diverso approccio del problema. Per questa ragione ammetteremo condizioni di 'minore regolarità' geometrica della frontiera. I risultati che presenteremo in questa nota sono stati ottenuti in collaborazione con Bruno Franchi [14] e riguardano una formula di duplicazione, vedi Teorema 4.1, della misura $\mathcal{L}$-armonica relativa ad operatori della forma seguente:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{p} X_j^* X_j,$$

dove X_j, $j = 1, \cdots, p$ sono campi vettoriali C^∞ del primo ordine omogenei (X_j^* è l'aggiunto formale) che soddisfano la condizione sul rango di Hőrmander, su domini $\Omega \subset R^n$ aperti e limitati che tengano conto nella loro definizione di quanto sia 'facile' connettere un punto 'vicino'alla frontiera con altri 'distanti'p er mezzo di opportune catene di palle definite a partire da una metrica equivalente a quella naturalmente associata all'operatore, vedi Definizione 4.2 di dominio ϕ-Harnack nella Sezione 4.

Per ottenere questo genere di risultati abbiamo adattato alcune tecniche probabilistiche già impiegate per lo studio del comportamento alla frontiera delle

funzioni armoniche, su domini fortemente irregolari, vedi [1] e [2] e [13] per un approccio non probabilistico.

La presente nota è organizzata in cinque brevi sezioni, oltre alla prima che è l'introduzione, la seconda e la terza sono dedicate rispettivamente, al fine di rendere più agevole la comprensione delle notazioni, ad una breve presentazione degli operatori subellittici studiati (si vedano [19], [15], [25], [27], [28] e [29] per un'ampia bibliografia sul tema) e alla teoria del potenziale astratto (si vedano i lavori di [5], [4], [6], [3], [17], [18] e [9] per riferimenti ed ulteriori precisazioni), mentre le rimanenti sezioni sono dedicate alla presentazione dei risultati ottenuti.

2 Richiami sulle proprietà degli operatori subellittici

Posto $X = \{X_1, \cdots, X_p\}$ una famiglia di campi vettoriali R^n , $n \geq 3$ che soddisfano la condizione sul rango di Hőrmander:

$$\text{rango} L(X_1, \cdots, X_p) = n$$

e considerato che ciò significa assumere che esistano n commutatori linearmente indipendenti di ordine minore o uguale a $r \in N \cup \{0\}$, per fissare la notazione indicheremo con $m-1$ il minimo intero non negativo r che soddisfa tale proprietà, ponendo $\epsilon = m^{-1}$, diremo che $v \in R^n$ è sub-unitario rispetto a X nel punto x se

$$\langle v, \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{p} \langle X_j(x), \xi \rangle^2$$

per ogni $\xi \in R^n$. Diremo poi che una curva assolutamente continua $\gamma : [0, T] \to R^n$ è detta subunitaria rispetto ad X se $\gamma'(t)$ è subunitaria rispetto ad X in $x = \gamma(t)$ per quasi ogni $t \in [0, T]$. Quindi se $x, y \in R^n$, posto

$$\Gamma = \{\gamma : \ \gamma \text{ curva subunitaria}, \ \gamma : [0, T] \to R^n\},$$

si definisce

$$\rho(x, y) = \inf \{T > 0 : \text{ esiste} \gamma \in \Gamma : \ \gamma(0) = x, \ \gamma(T) = y\}.$$

La ρ così definita è una distanza [25] e tale metrica (detta metrica di Carnot-Carathéodory) gode della proprietà di duplicazione rispetto alla misura di Lebesgue, cioè, indicando con $B_{x,s}$ la palla rispetto la metrica ρ di centro x e raggio s, se $K \subset R^n$ è un insieme compatto, allora per ogni $x \in K$ esistono una costante positiva $A = A(K)$ e un numero positivo $s_0 = s_0(K)$ tali che

$$| B_{x,2s} | \leq A \, | B_{x,s} |,$$

e per ogni $x \in K$ e per ogni $0 < s < s_0$ dove $| E |$ indica la misura di Lebesgue dell'insieme E si ha

$$| B_{x,\delta s} | \geq \delta^Q | B_{x,s} |$$

per $x \in K$ e $\delta < 1$, dove $Q = \log_2 A$ è detta dimensione omogenea di R^n associata alla distanza di Carnot-Carathéodory ρ. La relazione che è possibile stabilire tra la metrica ρ e la metrica euclidea è la seguente. Per ogni compatto $K \subset R^n$ esistono due costanti positive, c_0 e c_0' tali che per ogni $x, y \in K$

$$c_0' \mid x - y \mid \leq \rho(x,y) \leq c_0 \mid x - y \mid^{\epsilon},$$

in particolare ciò significa che per ogni $r \in]0,1]$

$$B^E_{x,(c_0^{-1}r)^{1/\epsilon}} \subset B_{x,r} \subset B^E_{x,(c_0')^{-1}r}.$$

A differenza di quanto accade per l'operatore di Laplace esistono, anche per le superficie C^∞, punti per cui i vettori X_j sono tangenti alla superficie in x per ogni $j = 1, \cdots, p$. Tali punti sono detti *caratteristici*. Inoltre in questo contesto, nonostante la 'regolarità euclidea' della frontiera di un insieme, può essere che vi siano punti non regolari per il problema di Dirichlet ed noto che i punti irregolari per il problema di Dirichlet, per frontiere C^∞, sono anche punti caratteristici.

Un esempio classico di operatore subellittico è quello del sublaplaciano, vale a dire l'operatore che si ottiene a partire dalla famiglia di campi vettoriali invarianti a sinistra, $X = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$, sul gruppo di Heisenberg $H^n = C^n \times R$ dove i punti sono indicati da $[z,t]$, $z = x + iy$, $x, y \in R^n$, $t \in R$ e

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_t, \; Y_j = \partial_{x_j} - 2x_j \partial_t, \; j = 1, \cdots, n.$$

Indicheremo con

$$[z,t] \circ [\zeta, \tau] = [z + \zeta, t + \tau + 2Im < z, \bar{\zeta} >]$$

la moltiplicazione di gruppo (vedi [29]). Se si considera

$$\Omega = \{[z,t] \in C \times R : \; t > 0\},$$

allora $[0,0]$ è un punto caratteristico (in questo caso regolare per il problema di Dirichlet).

3 Richiami di teoria del potenziale astratto

La non esistenza di una soluzione classica del problema di Dirichlet per un dato insieme aperto limitato $\Omega \subset R^n$ e una assegnata funzione continua ϕ definita sulla frontiera $\partial\Omega$, ovvero l'esistenza di una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \; \Omega, \\ u = \phi, \; \partial\Omega, \end{cases}$$

spinse Lebesgue e soprattutto Wiener ad introdurre la definizione di soluzione generalizzata del problema di Dirichlet. Tale soluzione (soluzione PWB, dai cognomi dei matematici che hanno contribuito alla sua formulazione nel corso degli anni, Perron, Wiener e Brelot) viene costruita a partire da due classi di funzioni, per semplicità possiamo pensare ad esse come, rispettivamente, all'insieme delle 'soprafunzioni' $\overline{\mathcal{U}}_\Omega^\phi$ e a quello delle 'sottofunzioni' $\underline{\mathcal{U}}_\Omega^\phi$ associate alla coppia Ω, ϕ in un senso che andremo a precisare tra poco. Se

$$\overline{H}_\Omega^\phi \equiv \inf \overline{\mathcal{U}}_\Omega^\phi = \sup \underline{\mathcal{U}}_\Omega^\phi \equiv \underline{H}_\Omega^\phi$$

e $\overline{H}_\Omega^\phi$, $\underline{H}_\Omega^\phi$ sono armoniche, allora la funzione $H_\Omega^\phi := \overline{H}_\Omega^\phi \equiv \underline{H}_\Omega^\phi$ è detta soluzione generalizzata del problema di Dirichlet.

La costruzione della soluzione generalizzata del problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace può essere estesa ad altri operatori, purché siano soddisfatti alcuni 'assiomi' alla base della *teoria del potenziale astratto* . Nel 1969 Bony, [5], provò in particolare che se $X_1, \cdots, X_p$ sono operatori differenziali omogenei del primo ordine su di un insieme aperto $\Omega \setminus R^n$ che soddisfano l'ipotesi sul rango di Hőrmander, cioè l'algebra di Lie generata dai campi, $L(X_1, \cdots, X_p)$, ha in ogni punto rango n e l'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{p} X_k^2$$

è non totalmente degenere, ovvero in ogni punto $x \in \Omega$ almeno uno dei vettori $X_k(x)$, $1 \leq k \leq p$ non è nullo, allora il fascio $\mathcal{H}$ delle soluzioni u di $\mathcal{L}u = 0$ (tali funzioni, dette funzioni $\mathcal{L}$-armoniche, sono C^∞), soddisfano gli assiomi della teoria del potenziale astratto e verificano l'assioma di Brelot.

Senza addentrarci nel significato profondo di questi assiomi, la cui disanima esula dagli obiettivi chc questa nota si pone, può essere utile sapere che ciò significa garantire l'esistenza di una base di aperti regolari per la topologia di Ω e la validità della seguente disuguaglianza (assioma di Harnack): per ogni coppia di punti x, y di un aperto connesso A esiste una costante $C > 0$ tale che ogni funzione L-armonica positiva u in A vale

$$u(y) \leq Cu(x).$$

Riassumiamo ora come sia possibile costruire una soluzione generalizzata del problema di Dirichlet per l'operatore $\mathcal{L}$.

Un *aperto regolare* V è per definizione un aperto relativamente compatto di Ω tale che per ogni funzione $\phi \in C(\Omega)$ esiste una ed una sola funzione H_V^ϕ continua su $\overline{V}$, $\mathcal{L}$-armonica in V, uguale a ϕ su ∂V e tale che se ϕ è positiva, allora H_V^ϕ è positiva. L'applicazione che a ϕ fa corrispondere $H_V^\phi(x)$ per $x \in V$ fissato, definisce una misura, Teorema di Riesz, ω_V^x su ∂V positiva e di massa unitaria. Questa misura è detta *misura $\mathcal{L}$-armonica* in x relativa a V. Se esiste una base di intorni regolari

per Ω, allora è possibile dare la definizione di funzione *$\mathcal{L}$-iperarmonica* come segue. Una funzione $u : \Omega \to \bar{R}$, inferiormente semicontinua (i.s.c.) è *$\mathcal{L}$-iperarmonica* se per ogni insieme regolare $V \subset\subset \Omega$ e per ogni $x \in V$ vale la seguente formula di *supermedia*

$$u(x) \geq \int_{\partial V} u(\sigma) d\omega_V^x(\sigma).$$

Indicheremo l'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$-iperarmoniche su Ω con $\mathcal{H}^*(\Omega)$; l'insieme delle funzioni *$\mathcal{L}$-ipoarmoniche*, $\mathcal{H}_*(\Omega)$, è per definizione $-\mathcal{H}^*(\Omega)$. A questo punto risulta alquanto evidente l'analogia con l'operatore di Laplace dove la base degli intorni regolari è data dall'insieme delle palle aperte di R^n la cui chiusura è contenuta in Ω e le funzioni iperarmoniche sono definite come sopra, ma con la seguente formula di super-media:

$$u(x) \geq \int_{\partial B^E_{x_0,r}} u(\sigma) P(x,\sigma) dH_{n-1}(\sigma),$$

per ogni $x \in B^E_{x_0,r}$, $\overline{B}^E_{x_0,r} \subset \Omega$ (con $B^E_{x_0,r}$ palla euclidea di raggio r). Con P indichiamo il nucleo di Poisson; notiamo, in particolare, come la misura armonica associata all'operatore di Laplace soddisfi la seguente formula, per ogni $\Sigma \subset \partial B_{x_0,r}$ di Borel si ha

$$\omega^x_{B_{x_0,r}}(\Sigma) = \int_\Sigma P(x,\sigma) dH_{n-1}(\sigma),$$

con H_{n-1} $(n-1)-$misura di Hausdorff.

Utilizzando le funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche possiamo introdurre rispettivamente la classe delle 'soprafunzioni' e quella delle 'sottofunzioni' associate all'insieme Ω e ad una funzione $\phi : \partial\Omega \to \bar{R}$ come segue:

$$\overline{\mathcal{U}}^\phi_\Omega = \{u \in H^*(\Omega) : \inf_\Omega u > -\infty, \ \liminf_{y \to x \in \partial\Omega} u \geq \phi(x), \ \text{per ogni } x \in \partial\Omega\},$$

$$\underline{\mathcal{U}}^\phi_\Omega = \{u \in H_*(\Omega) : \sup_\Omega u < +\infty, \ \limsup_{y \to x \in \partial\Omega} u \leq \phi(x), \ \text{per ogni } x \in \partial\Omega\}.$$

Definiremo *soprasoluzione* generalizzata del problema di Dirichlet associato all'operatore $\mathcal{L}$, su $\Omega \subset R^n$ aperto e limitato $\Omega \subset R^n$ con dato al bordo ϕ, la seguente funzione

$$\overline{H}^\phi_\Omega := \inf \overline{\mathcal{U}}^\phi_\Omega$$

e in modo analogo

$$\underline{H}^\phi_\Omega := \sup \underline{\mathcal{U}}^\phi_\Omega.$$

Finalmente, data una funzione $\phi : \partial\Omega \to \bar{R}$, diremo che ϕ è *risolutiva* se:
i) $\overline{H}^\phi_\Omega = \underline{H}^\phi_\Omega$
e
ii) $\overline{H}^\phi_\Omega$ e $\underline{H}^\phi_\Omega$ sono $\mathcal{L}$-armoniche.

In tal caso $H^\phi_\Omega := \overline{H}^\phi_\Omega = \underline{H}^\phi_\Omega$ è la *soluzione generalizzata* del problema di Dirichlet.

Le funzioni *$\mathcal{L}$-superarmoniche* vengono definite nel modo seguente: $u \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ è $\mathcal{L}$-superarmonica se per ogni aperto regolare V, $\bar{V} \subset \Omega$ la funzione

$$x \rightarrow \int_{\partial V} u(\sigma) d\omega^x_V(\sigma),$$

definita su V, è $\mathcal{L}$-armonica. L'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche in Ω è usualmente indicato con $\mathcal{S}(\Omega)$, mentre l'insieme delle funzioni *$\mathcal{L}$-subarmoniche* è dato da $-\mathcal{S}(\Omega)$. Il *Teorema di Wiener* garantisce che ogni funzione $\phi \in C(\partial\Omega)$, con $\Omega \subset R^n$ aperto limitato, è risolutiva, quindi, per il Teorema di Riesz e il principio del massimo, per ogni $x \in \Omega$ esiste una sola misura di Borel di massa unitaria su $\partial\Omega$, ω^x_Ω, la misura $\mathcal{L}$-armonica in x, tale che per ogni $x \in \Omega$,

$$H^\phi_\Omega(x) = \int_{\partial\Omega} \phi(x) d\omega^x_\Omega(\sigma).$$

Il problema di caratterizzare attraverso un' opportuna misura le funzioni risolutive, fu risolto da Brelot 'adattando' la definizione di misura armonica precedentemente fornita ad una nuova σ-algebra. Infatti, posto $\mathcal{F}$ la σ-algebra, contenente la σ-algebra di Borel degli insiemi di $\partial\Omega$, definita come

$$\mathcal{F} = \bigcap_{x \in \Omega} \mathcal{F}_x,$$

dove $\mathcal{F}_x$ sono le σ-algebra degli insiemi della forma

$$F = (E \setminus N) \cup (N \setminus E),$$

$E \subset \partial\Omega$ insieme di Borel, $N \subset A \subset \partial\Omega$, A insieme di Borel con $\omega^x_\Omega(A) = 0$. Per cui continuando ad indicare con ω^x_Ω la misura relativa ad x, Ω e $\mathcal{L}$ sulla σ-algebra $\mathcal{F}$, definita attraverso l'unica estensione possibile, vale a dire $\omega^x_\Omega(F) = \omega^x_\Omega(E)$ vale il seguente *Teorema di Brelot*. Per ogni insieme aperto e limitato $\Omega \subset R^n$ fissato, una funzione $\phi : \partial\Omega \rightarrow \bar{R}$ è risolutiva se e solo se è ω_Ω integrabile e in tal caso per ogni $x \in \Omega$

$$H^\phi_\Omega(x) = \int_{\partial\Omega} \phi d\omega^x_\Omega(\sigma).$$

La misura ottenuta attraverso la precedente estensione è la misura $\mathcal{L}$-armonica. Ovviamente la costruzione di queste soluzioni generalizzate non garantisce l'esistenza di soluzioni classiche. Infatti i punti $y \in \partial\Omega$ sono detti *regolari per il problema di Dirichlet* se per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$

$$\lim_{x \rightarrow y} H^\phi_\Omega(x) = \phi(x).$$

Quando ciò non accade allora siamo in presenza di punti *irregolari per il problema di Dirichlet.* A tal proposito vale la pena di sottolineare che i punti della frontiera di un aperto limitato $\Omega \subset R^n$ sono regolari se e solo se $R^n \setminus \Omega$ non è *sottile* in tali punti; ricordiamo che un insieme $E \subset R^n$ è sottile in un punto limite $y \in E$ se e solo se esiste una funzione $\mathcal{L}$-superarmonica u in un intorno di y tale che

$$u(y) < \liminf_{x \to y,\, x \in E \setminus \{y\}} u(x).$$

D'altra parte l'insieme dei punti di E per cui E è sottile è un insieme *polare*, cioè un insieme per il quale esistono un aperto U, $E \subset U$ e una funzione $\mathcal{L}$-superarmonica su U tale che $u = +\infty$ su E.

Questo tipo di risultati spiega come l'irregolarità della frontiera per il problema di Dirichlet sia intrinsecamente connessa alla natura dell'insieme. Per esempio nel caso dell'operatore di Laplace esistono gli esempi classici di punti irregolari della frontiera di un insieme Ω dati dai vertici di cuspidi, componenti il complementare insiemistico di Ω, quali la *spina di Lebesgue*, $n \geq 3$ o la *cuspide algebrica* per $n > 3$.

Il test secondo il quale procedere nell'individuazione dei punti irregolari rimane anche in questo ambito il test di Wiener, si veda l'estensione agli operatori subellittici in [26]. Per concludere questa sezione occorre sottolineare come la natura dei punti irregolari sia ulteriormente complicata, almeno ai nostri occhi 'euclidei', dalla necessità di impiegare metriche, quelle naturalmente associate all'operatore, non equivalenti alla metrica euclidea.

4 Notazioni e risultati principali

Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di $R^n = R^{n-1} \times R$, scriveremo $y = (y', y_n) \in R^n$ dove $y' \in R^{n-1}$, $y_n \in R$. Supponiamo inoltre che la frontiera di Ω sia localmente il grafico di una funzione $f \in C^{1,\alpha}(R^{n-1})$, $\alpha \in]0,1]$ tale che $f(0) = 0$ e $\nabla f(0) = 0$. Per semplicità, poiché questa ipotesi non è restrittiva per il nostro scopo, considereremo

$$\Omega = \{(y', y_n) \in R^n : \ f(y') < y_n < f(y') + M_1, \ \ |y'| < M_2\}$$

con M_1 e M_2 costanti positive. Sia poi m come definito nella Sezione 2 e b un numero positivo, allora

$$F_b^m = \{(y', y_n) \in R^n : \ f(y') < y_n < f(y') + b^m\},$$

mentre per ogni $x = (x', x_n) \in R^n$ porremo

$$\Delta^m(x, b, r) = \{(y', y_n) \in R^n : \ f(y') \leq y_n \leq f(y') + b^m, \ \mid y' - x' \mid < r\},$$

$$\partial^s \triangle (x,b,r) = \{(y',y_n) \in R^n : \ f(y') < y_n < f(y') + b^m, \ | y' - x' | = r\},$$
$$\partial^u \triangle (x,b,r) = \{(y', y_n + b^m) \in R^n : | y' - x' | \leq r\}$$

e $\delta(x) = x_n - f(x')$. Il primo risultato è dato dalla seguente stima superiore della misura $\mathcal{L}$-armonica della superficie laterale dei cilindri $\triangle^m(x,b,r)$.

Lemma 4.1 *Esistono una costante positiva $c_1 \in]0,1[$ ed una costante $c_2 > 1$ tali che per ogni $x \in \Omega$, e dati b, r, numeri positivi, $r \geq c_2 b$, per ogni $y \in \triangle^m(x,b,r)$, se $y' = x'$, allora*

$$\omega^y_{\triangle^m(x,b,r)}(\partial^s \triangle^m (x,b,r)) \leq c_1^{[r/b]}.$$

Per poter introdurre i domini su cui opereremo abbiamo bisogno di alcune definizioni e richiami preliminari.

Definizione 4.1 *Diremo che una quasi-metrica $\tilde{\rho}$ è compatibile con $\mathcal{L}$ se $\tilde{\rho}$ è equivalente alla metrica di Carnot-Caratheodory ρ, cioè esistono c, C costanti positive tali che*

$$c\rho(x,y) \leq \tilde{\rho}(x,y) \leq C\rho(x,y) \tag{1}$$

for all $x, y \in R^n$.

La *disuguaglianza di Harnack invariante* per le ρ-palle (o per $\tilde{\rho}$-palle) di operatori subellittici associati ad una famiglia di campi vettoriali è uno dei risultati più importanti nello studio, per mezzo delle metriche di Carnot-Carathéodory, degli operatori ellittici degeneri (vedi [15],[7] [23], [16]). In particolare se $\tilde{\rho}$ è una quasi-metrica compatibile e $\tilde{B} = \tilde{B}_{x,r}$ è una $\tilde{\rho}$-palla tale che $c_H\tilde{B} \subset \Omega$, dove $c_H = c_H(\tilde{\rho}) > 1$ è una costante geometrica, allora se $u > 0$ e $\mathcal{L}u = 0$ in Ω,

$$\sup_{\tilde{B}} u \leq C \inf_{\tilde{B}} u,$$

dove $C > 0$ è la costante della disuguaglianza di Harnack per le ρ-palle. È dunque naturale costruire delle *catene* di palle che consentano l'applicazione della disuguaglianza di Harnack passo per passo. Infatti sia $\tilde{\rho}$ quasi-metrica compatibile; una $\tilde{\rho}$-catena di palle di Harnack di lunghezza ν che connette $x_1 \in \Omega$ con $x_2 \in \Omega$ è una successione finita di $\tilde{\rho}$-palle contenute in Ω, con centro $y_1 = x_1, y_2, \dots, y_\nu = x_2$ e di raggi $r_j \leq \text{dist}_{\tilde{\rho}}(y_j, \partial\Omega)$, tali che per $j = 1, \cdots, \nu - 1$, valga

$$\rho(y_j, y_{j+1}) \leq \theta \min\{r_j, r_{j+1}\},$$

dove $\theta = \theta(c_H)$.

Ora siamo in grado di dare la definizione di dominio ϕ-Harnack.

Definizione 4.2 *Sia $\tilde{\rho}$ una quasi-metrica compatibile e $\phi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ sia una funzione non crescente. Diremo che Ω è un dominio ϕ-Harnack in un intorno U dell'origine se esistono $c(U) > 0, c_2(U), c_3(U), c_4 > 1$ tali che per ogni $r, b > 0$ sufficientemente piccoli, $c_4(U)r > b$ e per ogni $w \in U \cap \Omega$ con $\Delta^m(w, c_2(U)b, c_3(U)r) \subset U \cap \Omega$, allora, se $x \in \Delta^m(w,b,r)$, allora esiste $y \in \Omega$, $\delta(y) > (c_2(u)b)^m$, $| y' - w' | < c_3(U)r$ e una $\tilde{\rho}$-catena di Harnack $H = \{\tilde{B}_j,\ 1 \leq j \leq \nu\}$ che connette x con y, $\delta(x) < b^m$, $\delta(y) > b^m$ tali che:*
i) $\tilde{B}_j \subset \Delta^m(0,1,c_3(U)r)$, per $1 \leq j \leq \nu$;
ii) $\nu \leq \phi(\delta(x)) - \phi(b^m)$;
iii) se poniamo $S = \bigcup_{j=1}^{\nu} \tilde{B}_j$, allora

$$\omega_S^y(\partial S \setminus F_{c_2(U)b^m}) \geq c(U).$$

Con questo tipo di dominio è possibile fornire una limitazione inferiore della misura armonica secondo quanto contenuto nel seguente risultato.

Lemma 4.2 *Sia Ω un dominio ϕ-Harnack. Se $b, r > 0$, $\Delta^m(0,b,r) \subset U$ e $\gamma > 0$ sono tali che $c_2(U) < \gamma$, $c_3(U)b < \gamma r$, allora per ogni $x \in \Delta^m(0,b,r)$ si ha*

$$\omega^x_{\Delta^m(0,\gamma b,\gamma r)}(\partial^u \Delta^m (0, \gamma b \gamma r)) \geq C(U) c^{-(\phi(\delta(x)) - \phi(b^m))},$$

dove $C > 0$ è una costante indipendente da b e da r.

Introduciamo la seguente ulteriore notazione; per ogni numero positivo γ indichiamo con $\partial^g \Delta^m (x, \gamma b, \gamma r)$ il seguente sottoinsieme della frontiera del cilindro $\Delta^m(x, \gamma b, \gamma r)$,

$$\partial^g \Delta^m (x, \gamma b, \gamma r) = \partial \Delta^m (x, \gamma b, \gamma r) \setminus (\partial\Omega \cup \partial^s \Delta^m (x, b, \gamma r)).$$

Teorema 4.1 *Supponiamo che Ω sia un dominio ϕ-Harnack $\{b_k\}_{k \in N}$, $\{r_k\}_{k \in N}$ due successioni decrescenti di numeri positivi tali che:*
i) $r_0 = 2r$, $r_k \to (1+\theta)r$, $\theta > 0$ e $b_0 = b$, $b_k \to 0$;
ii) $r_k - r_{k+1} \geq c_2 b_{k+1}$, dove c_2 è la costante del Lemma 4.1;
iii) $\sum_{j=0}^{\infty} \exp\left((\phi(b^m_{j+2}) - \phi(b^m) - \frac{\tilde{c}(r_j - r_{j+1})}{b_{j+1}}\right) < \infty$, dove $\tilde{c} = | \log c_1 |$, c_1 definita nel Lemma 4.1.

Se $b, r > 0$, allora esiste una costante positiva $c = c(r,b)$ tale che per ogni $y \in \Delta^m(x,b,r)$, x in un intorno U dell'origine vale

$$\omega^y_{\Delta^m(x,2b,2r)}(\partial^s \Delta^m (x, b, 2r)) \leq c\,\omega^y_{\Delta^m(x,2b,2r)}(\partial^g \Delta^m (x, 2b, 2r)),$$

dove

$$c(b,r) \leq C(U)(\exp(\phi(b_1^m) - \phi(b^m)) + \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\phi(b^m_{k+2}) - \phi(b^m) - \tilde{c}(r_k - r_{k+1})/b_{k+1})).$$

Quindi vale la seguente formula di duplicazione:

$$(2)\qquad \omega^y_{\Delta^m(x,2b,2r)}(\partial\,\Delta^m\,(x,2b,2r)\setminus\partial\Omega) \leq (1+c(b,r))\omega^y_{\Delta^m(x,2b,2r)}(\partial^g\,\Delta^m\,(x,2b,2r)).$$

5 Esempi di domini ϕ-Harnack

Una metrica compatibile nel gruppo di Heisenberg è la seguente:

$$\tilde{\rho}(P,Q) = \|P^{-1}\circ Q\|,$$

dove $\|[z,t]\| = \max\{|\,z\,|, \sqrt{|\,t\,|}\}$ e

$$[z,t]\circ[\zeta,\tau] = [z+\zeta, t+\tau+2Im < z,\bar{\zeta} >].$$

In base a quanto definito nella Sezione 2 si ha che $m = 2$. Supponiamo per semplicità di considerare il caso in cui $n = 1$ e $f = f(z) \geq 0$ sia una funzione Lipschitz continua definita in C con le seguenti proprietà:
i) $f(\lambda z) = \lambda^{1+\beta}f(z)$, for $z \in C$, $\lambda > 0$, e per un dato $\beta \in [0,1]$ e

$$|\,f(z+\xi)-f(z)\,| \leq c_f\,|\,\xi\,|\,(|\,\xi\,|^\beta + |\,z\,|^\beta).$$

ii) $\inf_{|z|=1} f(z) = \hat{c} > 0$.

Teorema 5.1 *Sia f come sopra.*

a) Se $0 \leq \beta < 1$, allora $\Omega = \{t > f(z)\}$ è un dominio ϕ – Harnack con $\phi(s) = cs^{1-\frac{2}{\beta+1}}$ e c costante positiva.
b) Se $\beta = 1$, allora Ω è un dominio ϕ – Harnack con $\phi(s) = C\,|\log s\,|$ e C costante positiva.

Volendo dare una nozione puramente intuitiva del metodo con cui si costruisce la catena di palle che connette $[z,t]$ con $[z',t']$, $\delta([z',t']) = t' - f(z') > b^2$ possiamo dire che il primo passo consiste nel 'muoversi' sul segmento di estremi $[z,t]$, $[0,t]$ verso 'l'interno' di Ω, fino a quando non saremo 'abbastanza vicini' alla retta di equazione $z = 0$; a quel punto ci 'muoveremo' in verticale fino a raggiungere il livello t'.

Diamo ora un cenno, per un caso semplice, della dimostrazione relativa alla stima della lunghezza della catena di Harnack (punto (ii) della Definizione 4.2).

Sia $[z,t] \in \mathcal{P} = \{[z,\tau] \in H^1 : \tau > |\,\xi\,|^2\}$. Siano poi $\tilde{B}_{[0,0],r} = \{[\xi,\tau] \in H^1 : \|[\xi,\tau]\| < r\}$ e $\tilde{B}_{[z,t],r} = \{[q,s] \in H^1 : \|[-z,-t]\circ[q,s]\| < r\}$. In particolare,

per l'invarianza della quasi-metrica per le traslazioni del gruppo, vale $\tilde{B}_{[z,t],r} = [z,t] \circ \tilde{B}_{[0,0],r}$.

Imponendo che $\tilde{B}_{[z,t],r} \subset \mathcal{P}$ se ne ricava

$$t + \tau + 2Im < z, \bar{\xi} > \geq | z + \xi |^2 \tag{3}$$

per ogni $[\xi, \tau] \in \tilde{B}_{[0,0],r}$.

D'altra parte

$$t + \tau + 2Im < z, \bar{\xi} > \geq t - r^2 - 2 | z | r, \tag{4}$$

per ogni $| \xi | \leq r$. Quindi, per il Teorema della media di Lagrange, da (3) e (4) segue

$$r^2 + 2 | z | r + 2r(r + | z |) - (t - | z |^2) \leq 0,$$

cioè

$$3r^2 + 4 | z | r - (t - | z |^2) \leq 0.$$

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$r = -2 | z | + \sqrt{4 | z |^2 + (t - | z |^2)} = \frac{3(t - | z |^2)}{2 | z | + \sqrt{4 | z |^2 + (t - | z |^2)}}.$$

Sia ora $[z, t]$ tale che

$$t - | z |^2 \leq | z |^2, \tag{5}$$

allora

$$r \geq c \frac{t - | z |^2}{| z |}$$

in tal caso si definisce la seguente successione di punti $[z_0, t_0] = [z, t]$,

$$[z_{j+1}, t_{j+1}] = [z_j - c \frac{t - | z_j |^2}{| z_j |}, t], .$$

$z_j / | z_j | = z / | z |$ per $j \in N$ e $[z_j, t_j]$ che soddisfa (5). Da cio segue che se j_0 è il primo intero per cui (5) non è verificata, allora

$$j_0 \leq C \log \frac{b^2}{t - | z |^2}.$$

Se (5) non vale allora

$$r > c\sqrt{t - | z |^2}.$$

In tal caso muovendosi in 'verticale', definendo cioè la successione $[z_0, t_0] = [z, t]$ e

$$[z_{j+1}, t_{j+1}] = [z, t_{j+1}],$$

con $t_{j+1} = t_j + c^2(t_j - |z|^2)$, si ottiene che il primo intero k per cui $[z_j, t_j]$ ha quota $t_{j+1} > b^2$ soddisfa la seguente stima:

$$k \leq C \log \frac{b^2}{t - |z|^2}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] R.F. Bass & K. Burdzy, *A probabilistic proof of the boundary Harnack principle*, in Seminar on Stochastic Processes, 1989 (E. Cinlar, K. L. Chung and R. K. Getor, eds.), Birkhauser, Boston, Mass., 1–16,(1990).

[2] R.F. Bass & K. Burdzy, *A boundary Harnack principle for twisted Hőlder domains*, Ann. of Math. 134, 253–276, (1991).

conditioned

[3] H. Bauer, *Harmonic spaces and associated Markov processes*, C.I.M.E., 1 Ciclo Stresa 1969, Potential Theory, 23-67 (1970).

[4] J.M. Bony, *Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont le fonctions harmoniques sont différentiables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 353-382 (1967).

[5] J.M. Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problèm de Cauchy pou les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble 19, 277–304 (1969)

[6] J.M. Bony, *Opérateurs elliptiques degénérés associés aux axiomatiques de la Théorie du potentiel*, C.I.M.E. 1 Ciclo Stresa 1969, Potential Theory, 69-119 (1970).

[7] L.Capogna, D.Danielli & N.Garofalo, *An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations*, Commun. Partial Differ. Equations 18, No.9-10, 1765-1794 (1993).

[8] L.Capogna & N.Garofalo, *Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA domains for Carnot-Carathéodory metrics*, J. Fourier Anal. Appl. 4, 403–432 (1998).

[9] C. Constantinescu & A. Cornea, *Potential theory on harmonic spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[10] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola & S. Salsa, *Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana J. Math., 30, 621–640, (1981).

[11] B.E.J. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal., 65, 272–288 (1977).

[12] E. Fabes, N. Garofalo & S. Salsa*A backward Harnack inequality and Fatou theorem for non-negative solutions of parabolic equations*, Ill. J. of Math. 30, 536-565, (1986).

Springer,

[13] F. Ferrari, *On boundary behavior of harmonic functions on Hölder domains*, J. Fourier Anal. Appl. 4, 447–461, (1998).

[14] F.Ferrari & B.Franchi, *A local doubling formula for the harmonic measure associated with subelliptic operators*, preprint (2000).

[15] B.Franchi & E.Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 10, 523-541 (1983).

[16] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Sur les ensembles de perimetre fini dans le groupe de Heisenberg*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. 329, No.3, 183-188 (1999).

and Sobolev existence of minimal

[17] L.L. Helms, *Introduction to potential theory*Wiley-Interscience series in Pure and Applied Mathematics (vol XXII), (1969)

[18] M. Hervé & R.M. Hervé, *Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associèes a un operateur elliptique dégénéré*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 22, 131–145 (1972).

[19] L.Hörmander, *Hypoelliptic second-order differential equations*, Acta Math., **119**, 147-171 (1967). spaces and minisemester on Gakkotosho

[20] R.R. Hunt & R.L. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Mat. Soc. 147, 507–527 (1970).

[21] D. Jerison & C. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accesible domains*, Adv. Math. 46, 80–147 (1982).

[22] G. LU *Weighted Poincare and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications*, Rev. Mat. Iberoam. 8, No.3, 367-439 (1992).

[23] G. LU, *Embedding theorems into Lipschitz and BMO spaces and applications to quasilinear subelliptic differential equations*, Publ. Mat., Barc. 40, No.2, 301-329 (1996).

[24] D. MORBIDELLI, *Fractional Sobolev norms and structure of Carnot-Carathéodory balls for Hörmander Vector fields*, Studia Math., to appear.

[25] A. NAGEL & E. M. STEIN & S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. 155, 103–147, (1985).

class of (1984).

[26] P. NEGRINI & V. SCORNAZZANI, *Wiener Criterion for a Class of Degenerate Elliptic Operators*, Journal of Differential Equations 66, 151–164 (1987).

[27] L. P. ROTHSCHILD & E. M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math 137, 247–320 (1976)

[28] A. SANCHEZ-CALLE, *Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields*, Inv. Math. 78, 143–160 (1984).

[29] E.M.STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.